ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ПРОПУСКНЫХ СПОСОБНОСТЕЙ КАНАЛОВ И УЗЛОВ СЕТЕЙ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

В.М. Гостев, Р.Ф. Хабибуллин

Одна из классических постановок задачи оптимального выбора пропускных способностей каналов сети передачи данных [1] состоит в минимизации средней задержки пакета при передаче по каналам связи при условии, что суммарная стоимость использования (аренды) каналов не превосходит заданной величины. В предположении, что функции стоимости аренды каналов передачи данных линейны, в [1] получено точное решение рассматриваемой задачи в аналитической форме. В этом решении оптимальная пропускная способность каждого канала определяется отдельно для каждого из двух его направлений передачи данных в зависимости от интенсивности потоков на этих направлениях. Поэтому, если на некотором канале интенсивности потоков на двух его направлениях передачи данных окажутся различными, то на этом канале оптимальные пропускные способности для обоих направлений передачи данных также будут различны. В современных условиях, когда в компьютерной сети выделяются специализированные серверы обработки и серверы баз данных, случай несимметричных потоков на каналах типичен. В то же время пропускные способности каналов в обоих направлениях передачи данных, как правило, должны быть одинаковыми.

Таким образом, в случае несимметричной нагрузки на сеть выбор пропускных способностей каналов согласно [1] может оказаться неподходящим, и необходимо решить задачу с учетом того, что пропускная способность каждого канала должна быть одной и той же для обоих направлений передачи данных.

Задача оптимального выбора пропускных способностей узлов коммутации сетей передачи данных (СПД) в известной литературе (см., например, [1 - 6]) не рассматривалась. По-видимому, это можно объяснить тем, что критичными компонентами СПД считались каналы передачи данных с относительно низкими пропускными способностями, в то время как процессоры обработки данных в узлах коммутации обладали относительно более высокой скоростью. В современных условиях, когда имеются высокоскоростные (например, оптоволоконные) каналы, неоптимальный выбор производительности узлов коммутации СПД может оказать существенное влияние на эффективность сети.

В работе предлагаются методы решения рассмотренных задач оптимизации выбора пропускных способностей каналов передачи данных и узлов коммутации СПД территориальных компьютерных сетей.

Задача оптимального выбора пропускных способностей каналов передачи данных для случая несимметричных потоков

Пусть задана топология территориальной сети передачи данных в виде графа $G=(V,\overline{U})$, где множество вершин графа $V=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ соответствует множеству узлов коммутации (УК) СПД, а множество ребер $\overline{U}=\{u_1,u_2,...,u_m\}$ - множеству дуплексных каналов передачи данных (КПД).

Пусть, далее, для всех пар узлов сети заданы средние интенсивности потоков данных, порожденных внешними обращениями к СПД. Обозначим через p суммарную интенсивность этих потоков в бит/сек. Предполагается, что в СПД используется фиксированная однопутевая маршрутизация, т.е. пакеты от одного УК до другого проходят по одному и тому же заранее выбранному фиксированному маршруту. Задание маршрутов передачи пакетов для всех пар узлов источник-адресат при заданной топологии СПД однозначно определяет распределение потоков данных по сети, т.е. средние интенсивности потоков данных через все компоненты сети - как узлы коммутации, так и каналы передачи данных.

Обозначим через f_k' и f_k'' средние интенсивности потоков (в бит/сек), проходящих по каналу передачи данных $u_k \in \overline{U}$ в обоих направлениях, $k=\overline{1,m}$, и через $1/\mu$ - средний размер сообщения. Как и в [1, 2] будем рассматривать каждый КПД как систему массового обслуживания типа M/M/1, т.е. для упрощения задачи предполагается, что входной поток на каждое из двух направлений передачи данных канала пуассоновский, а время передачи сообщения по каналу с пропускной способностью σ есть экспоненциально распределенная случайная величина со средним значением $1/\mu\sigma$. Обозначим $\bar{f}_k=\max\{f_k', f_k''\}$ для $k=\overline{1,m}$. Считаем не ограничивая общности, что все $\bar{f}_k>0$ для $k=\overline{1,m}$.

Тогда при выборе пропускных способностей каналов $c=(c_1,...,c_m)$, $c_k>\bar{f}_k$ для $k=\overline{1,m}$, средняя задержка пакета на каналах передачи данных при передаче по сети [1] при введенных обозначениях выразится величиной

$$T(c)=\frac{1}{p\mu}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{f_k'}{c_k-f_k'}+\frac{f_k''}{c_k-f_k''}\right). \qquad (1)$$

На это выражение опираются многочисленные исследования и методы оптимизации проектирования СПД. Допустимость сделанных предполо-

жений и полученных на их основе приближений, приемлемость полученных результатов для инженерных расчетов были неоднократно проверены путем моделирования и сопоставления с обширным фактическим материалом многими исследователями (см., например, [1 - 6]).

Сформулируем задачу оптимального выбора пропускных способностей каналов передачи данных.

Стоимость использования (аренды) каждого канала зависит от его типа, физической длины канала и его пропускной способности. Обозначим через $d_k(\sigma)$ стоимость канала $u_k \in \overline{U}$ с пропускной способностью σ и будем предполагать, что она линейно зависит от пропускной способности канала, т.е.

$$d_k(\sigma) = \alpha_k \sigma + \beta_k, \tag{2}$$

где $\alpha_k > 0$, $\beta_k \geq 0$ для всех $k = \overline{1,m}$.

Пусть допустимые затраты на аренду каналов передачи данных составляют величину D. Учитывая, что p и μ являются константами, целевую функцию (1) задачи можно определить следующим образом:

$$F(c) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{f_k'}{c_k - f_k'} + \frac{f_k''}{c_k - f_k''} \right), \tag{3}$$

Задача оптимального выбора пропускных способностей каналов передачи данных заключается в выборе таких значений $c = (c_1, c_2, ..., c_m)$, которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{m} (\alpha_k c_k + \beta_k) \leq D, \quad c_k > \bar{f}_k \text{ для всех } k = \overline{1,m},$$

и минимизируют функцию (3).

Очевидно, что для обеспечения выполнения условий $c_k > \bar{f}_k$, $k = \overline{1,m}$, величина допустимых затрат D при заданных функциях стоимости (2) должна быть больше величины

$$D_0 = \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k \bar{f}_k + \beta_k).$$

Нетрудно показать, что при $D > D_0$ решение рассматриваемой задачи $c^* = (c_1^*, c_2^*, ..., c_m^*)$ существует и единственно и для него выполняется

$$\sum_{k=1}^{m} (\alpha_k c_k^* + \beta_k) = D.$$

Для отыскания решения поставленной задачи воспользуемся правилом множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$L(c, \lambda) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{f_k'}{c_k - f_k'} + \frac{f_k''}{c_k - f_k''} \right) + \lambda \left(\sum_{k=1}^{m} (\alpha_k c_k + \beta_k) - D \right),$$

где $\lambda \geq 0$ - множитель Лагранжа. Дифференцируя функцию $L(c,\lambda)$ по c_k, $k=\overline{1,m}$, и приравнивая частные производные нулю, получаем:

$$\frac{\partial L}{\partial c_k} = \frac{-f_k'}{(c_k - f_k')^2} + \frac{-f_k''}{(c_k - f_k'')^2} + \lambda\alpha_k = 0$$

для всех $k=\overline{1,m}$ или, что то же самое,

$$\frac{f_k'}{(c_k - f_k')^2} + \frac{f_k''}{(c_k - f_k'')^2} - \lambda\alpha_k = 0. \qquad (4)$$

Дифференцируя $L(c,\lambda)$ по λ и приравнивая нулю, получаем

$$\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k c_k + \beta_k) - D = 0. \qquad (5)$$

Согласно правилу множителей Лагранжа в данном случае решение системы уравнений (4), (5) является решением поставленной задачи оптимизации. Эта система состоит из $(m+1)$ уравнений с $(m+1)$ неизвестными c_k, $k=\overline{1,m}$, и λ. Уравнения (4) являются уравнениями четвертой степени относительно c_k, и их не удается разрешить аналитически в явном виде. Поэтому для решения системы уравнений (4), (5) применим численный метод.

Численный метод решения задачи

Обозначим функции, стоящие в левых частях уравнений (4), через $\varphi_k(c_k,\lambda)$ для $k=\overline{1,m}$, т.е.

$$\varphi_k(c_k,\lambda) = \frac{f_k'}{(c_k - f_k')^2} + \frac{f_k''}{(c_k - f_k'')^2} - \alpha_k\lambda,$$

а функцию в левой части уравнения (5) через $\psi(c)$, т.е.

$$\psi(c) = \sum_{k=1}^{m}(\alpha_k c_k + \beta_k) - D.$$

Отметим, что при $\bar{f}_k > 0$ каждая функция $\varphi_k(c_k,\lambda)$ при фиксированном $\lambda > 0$ и при $c_k > \bar{f}_k$ является строго монотонно убывающей по c_k, при этом $\lim\limits_{c_k \to \bar{f}_k + 0} \varphi_k(c_k) = +\infty$ и $\lim\limits_{c_k \to +\infty} \varphi_k(c_k,\lambda) = -\alpha_k\lambda < 0$. Поэтому для произвольного фиксированного $\lambda > 0$ каждое уравнение (4) при $c_k > \bar{f}_k$ имеет единственное решение, зависящее от выбранного $\lambda > 0$.

Обозначим при фиксированном $\lambda > 0$ через $\hat{c}_k(\lambda)$ корень уравнения $\varphi_k(c_k,\lambda) = 0$, $k=\overline{1,m}$, т.е. $\varphi_k(\hat{c}_k(\lambda),\lambda) = 0$, при этом очевидно, что выполняется

$$\varphi_k(c_k,\lambda) > 0 \text{ для } c_k < \hat{c}_k(\lambda) \text{ и } \varphi_k(c_k,\lambda) < 0 \text{ для } c_k > \hat{c}_k(\lambda). \qquad (6)$$

Определим для произвольного $\lambda > 0$ и $k = \overline{1,m}$

$$\bar{c}_k(\lambda) = \bar{f}_k + \sqrt{\frac{2\bar{f}_k}{\alpha_k \lambda}}. \tag{7}$$

У т в е р ж д е н и е 1. *Для произвольного фиксированного* $\lambda > 0$ *выполняется*

$$\hat{c}_k(\lambda) \le \bar{c}_k(\lambda) \tag{8}$$

для всех $k = \overline{1,m}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Считая для определенности, что $\bar{f}_k = f_k'$ и, следовательно, $\bar{f}_k \ge f_k''$, имеем

$$\varphi_k(\bar{c}_k(\lambda),\lambda) = \frac{\bar{f}_k}{\left(\bar{f}_k + \sqrt{\frac{2\bar{f}_k}{\alpha_k\lambda}} - \bar{f}_k\right)^2} + \frac{f_k''}{\left(\bar{f}_k + \sqrt{\frac{2\bar{f}_k}{\alpha_k\lambda}} - f_k''\right)^2} - \alpha_k\lambda =$$

$$= \frac{\alpha_k\lambda}{2} + \frac{f_k''}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{f}_k}{\alpha_k\lambda}} + \bar{f}_k - f_k''\right)^2} - \alpha_k\lambda \le \frac{f_k''\alpha_k\lambda}{2\bar{f}_k} - \frac{\alpha_k\lambda}{2} = \frac{\alpha_k\lambda}{2}\left(\frac{f_k''}{\bar{f}_k} - 1\right) \le 0.$$

Итак, $\varphi_k(\bar{c}_k(\lambda),\lambda) \le 0$. Отсюда, учитывая (6), и поскольку $\varphi_k(c_k,\lambda)$ строго монотонно убывает по c_k, следует, что для всех $k = \overline{1,m}$ выполняется (8).

Таким образом, для любого фиксированного значения $\lambda > 0$ корни $\hat{c}_k(\lambda)$ системы уравнений (4) находятся на соответствующих полуинтервалах $(\bar{f}_k, \bar{c}_k(\lambda)]$ или, что то же самое, выполняется $\bar{f}_k < \hat{c}_k(\lambda) \le \bar{c}_k(\lambda)$. Тогда при любом $\lambda > 0$ для решения каждого уравнения $\varphi_k(c_k,\lambda) = 0$ в (4) можно применить метод дихотомии (метод деления отрезка пополам). Можно также применить, например, метод Ньютона, использовав $\bar{c}_k(\lambda)$, определенные в (7), в качестве начального приближения.

Итак, для каждого $\lambda > 0$ можно найти решение системы уравнений (4) с любой заданной точностью. Остается найти значение $\lambda = \lambda^*$, при котором для $c_k = \hat{c}_k(\lambda^*)$, $k = \overline{1,m}$, выполняется (5).

У т в е р ж д е н и е 2. *Если для некоторых* $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ *выполняется* $\lambda_1 > \lambda_2$, *то для всех* $k = \overline{1,m}$ *справедливо* $\hat{c}_k(\lambda_1) < \hat{c}_k(\lambda_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если предположить обратное, т.е. что для некоторого k выполняется $\hat{c}_k(\lambda_1) \ge \hat{c}_k(\lambda_2)$, тогда из (4) имеем

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha_k}\left(\frac{f_k'}{(\hat{c}_k(\lambda_1) - f_k')^2} + \frac{f_k''}{(\hat{c}_k(\lambda_1) - f_k'')^2}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha_k}\left(\frac{f_k'}{(\hat{c}_k(\lambda_2)-f_k')^2}+\frac{f_k''}{(\hat{c}_k(\lambda_2)-f_k'')^2}\right)=\lambda_2,$$

т.е. $\lambda_1 \le \lambda_2$, что противоречит условию $\lambda_1 > \lambda_2$. Таким образом, не существует k, для которого при $\lambda_1 > \lambda_2$ выполняется $\hat{c}_k(\lambda_1) \ge \hat{c}_k(\lambda_2)$, и значит для всех $k=\overline{1,m}$ выполняется $\hat{c}_k(\lambda_1) < \hat{c}_k(\lambda_2)$, что и требовалось доказать.

Определим

$$\bar{\lambda}=\left(\frac{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{2\alpha_k \bar{f}_k}}{D-D_0}\right)^2.$$

Утверждение 3. *Имеет место* $\lambda^* \le \bar{\lambda}$.

Доказательство. Из (7) следует

$$\bar{c}_k(\bar{\lambda})=\bar{f}_k+\sqrt{\frac{2\bar{f}_k}{\alpha_k\bar{\lambda}}}=\bar{f}_k+\frac{D-D_0}{\alpha_k}\frac{\sqrt{\alpha_k\bar{f}_k}}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\alpha_k\bar{f}_k}},\ k=\overline{1,m}. \tag{9}$$

Для $\bar{c}=(\bar{c}_1(\bar{\lambda}),...,\bar{c}_m(\bar{\lambda}))$ имеем

$$\psi(\bar{c})=\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k\bar{f}_k+\beta_k)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k(D-D_0)\sqrt{\alpha_k\bar{f}_k}}{\alpha_k\sum_{k=1}^{m}\sqrt{\alpha_k\bar{f}_k}}-D= \tag{10}$$

$$=D_0+(D-D_0)-D=0.$$

Если предположить, что в противоположность доказываемому выполняется $\bar{\lambda} < \lambda^*$, то согласно утверждению 2 имеем

$$\hat{c}_k(\bar{\lambda}) > \hat{c}_k(\lambda^*)=c_k^* \text{ для всех } k=\overline{1,m},$$

а согласно утверждению 1 $\hat{c}_k(\bar{\lambda}) \le \bar{c}_k(\bar{\lambda})$, т.е. $c_k^* < \bar{c}_k(\bar{\lambda})$, следовательно выполняется

$$0=\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k c_k^*+\beta_k)-D<\sum_{k=1}^{m}(\alpha_k\bar{c}_k(\bar{\lambda})+\beta_k)-D=\psi(\bar{c})=0.$$

Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что $\bar{\lambda} < \lambda^*$, неверно, и это завершает доказательство утверждения 3.

Согласно утверждению 3 имеет место $0 < \lambda^* \le \bar{\lambda}$, и для нахождения λ^* можно применить метод дихотомии. Выберем среднюю точку $\lambda=\bar{\lambda}/2$ интервала локализации λ^* и, решив систему (4) для этого значения λ, получим $\hat{c}(\lambda)=(\hat{c}_1(\lambda),...,\hat{c}_m(\lambda))$. Если $\psi(\hat{c}(\lambda))<0$, то это означает, что $\lambda^* < \lambda$, т.е. $\lambda^* \in (0,\lambda)$. Если же $\psi(\hat{c}(\lambda)) \ge 0$, то имеет место $\lambda^* \ge \lambda$, т.е. $\lambda^* \in [\lambda,\bar{\lambda}]$.

Таким образом, длина отрезка локализации λ^* уменьшается вдвое. Процесс продолжается до получения λ^* с необходимой точностью.

Приближенные решения задачи в аналитической форме

Выбор пропускных способностей каналов в соответствии с (9), как показано выше, при $\bar{f}_k > 0$, $k = \overline{1,m}$, и $D > D_0$ удовлетворяет всем условиям задачи, т.е. дает допустимое решение. Эти же значения пропускных способностей каналов получаются, если в выражении

$$c_k = \bar{f}_k + \frac{D - D_0}{\alpha_k} \frac{\sqrt{\alpha_k f_k}}{\sum_{k=1}^{m} \sqrt{\alpha_k f_k}}, \; k = \overline{1,m}, \tag{11}$$

положить

$$f_k = \bar{f}_k = \max\{ f_k', f_k''\}, \; k = \overline{1,m}. \tag{12}$$

В качестве f_k, $k = \overline{1,m}$, в (11) можно также взять средние арифметические значения потоков на каналах, т.е.

$$f_k = \frac{1}{2}(f_k' + f_k''), \; k = \overline{1,m}, \tag{13}$$

а если $\min\{ f_k', f_k''\} > 0$ для всех $k = \overline{1,m}$, то и средние геометрические потоков на каналах

$$f_k = \sqrt{f_k' f_k''}, \; k = \overline{1,m}. \tag{14}$$

Нетрудно убедиться, что и в этих случаях получающиеся согласно (11) значения пропускных способностей каналов $c = (c_1,...,c_m)$ удовлетворяют условиям задачи, т.к. выполняется

$$c_k > \bar{f}_k \text{ для всех } k = \overline{1,m}, \; \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k c_k + \beta_k) = D,$$

т.е. являются допустимыми решениями.

Отметим, что в случае симметричных потоков на каналах $f_k' = f_k''$, $k = \overline{1,m}$, все три способа задания f_k в (11) дают одно и то же решение, доставляющее минимальное значение критерию (1), т.е. являющееся оптимальным решением задачи. Поэтому их можно использовать для получения приближенных решений задачи в общем случае несимметричных потоков на каналах.

Для оценки погрешности этих решений были проведены вычислительные эксперименты для трех моделей СПД с различным числом каналов. Функции стоимости аренды каналов передачи данных (2) были построены на основе тарифов компании Таттелеком.

Для каждого варианта СПД генерировались варианты распределения потоков по каналам с различной степенью асимметрии

$$e = \frac{\sum_{k=1}^{m} \max\{ f_k', f_k''\}}{\sum_{k=1}^{m} \min\{ f_k', f_k''\}},$$

и для каждого из них определялись зависимости относительных погрешностей решений от величины доступных средств D. Для этого проводилось табулирование по значениям D в интервале от D_0 до $3D_0$, и для каждого значения D определялись оптимальное значение критерия $T(c^*)$ с помощью численного метода и значения критерия $T(c)$ при выборе $c = (c_1,...,c_m)$ по формуле (11) с использованием (12), (13) и (14).

На рис. 1 представлены результаты одного из расчетов, отражающие типичную картину характера изменения погрешностей приближенных решений. По оси абсцисс отложены значения D, а по оси ординат значения отношения $\delta = T(c)/T(c^*)$.

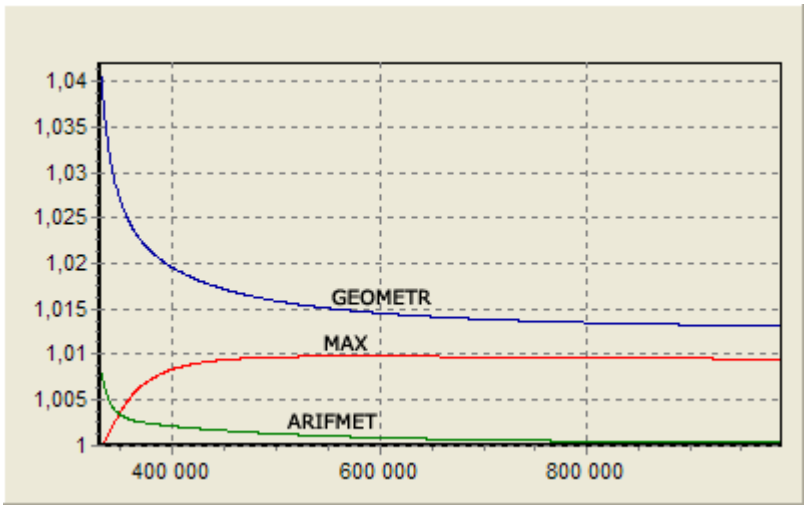

Рис. 1

Проведенные расчеты показали, что если D превышает D_0 не более, чем на 5-7%, наименьшую относительную погрешность (не более 0.5%) дает (11) с использованием (12). При дальнейшем увеличении D погрешность этого варианта решения не превышает 1-1.5%, а наименьшую относительную погрешность дает (11) с использованием (13), при этом погрешность этого решения быстро становится меньше 0.1% и далее с ростом D убывает практически до нуля.

Погрешность приближенного решения (11) с использованием (14) почти всегда была существенно больше, чем погрешность решения (11), (13). При этом решение (11), (14) было тем хуже, чем больше была асимметрия потоков на каналах, а его погрешность достигала 15%-20% (на рис. 1 при-

ведены результаты при значении коэффициента асимметрии e около двух).

Как правило, вариант решения (11), (12) давал лучшие результаты, чем (11), (14), при всех значениях D, однако примерно в 10% рассмотренных случаев при достаточно больших D погрешность решения (11), (14) была меньше, чем у решения (11), (12).

Оптимальный выбор пропускных способностей каналов из дискретного множества

На практике каналы связи предоставляются в аренду с фиксированными значениями пропускных способностей из стандартного ряда значений, например, 64, 128, 256, 512, 1024 и т.д. Кбит/сек. Рассмотрим задачу оптимального выбора пропускных способностей КПД в условиях, когда они должны выбираться из заданного дискретного множества значений.

Обозначим через $C=\{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_s\}$ множество допустимых значений пропускных способностей каналов передачи данных. Будем считать для определенности, что $\sigma_1<\sigma_2<...<\sigma_s$. Предполагается, что $0<\bar{f}_k<\sigma_s$ для всех $k=\overline{1,m}$. Обозначим через $d_k(\sigma)$ стоимость аренды канала передачи данных $u_k\in\overline{U}$ с пропускной способностью $\sigma\in C$ и будем предполагать, что табличные функции стоимости аренды $d_k(\sigma)$, $k=\overline{1,m}$, удовлетворяют условиям $0<d_k(\sigma_1)\le d_k(\sigma_2)\le...\le d_k(\sigma_s)$.

Пусть допустимые затраты на аренду каналов передачи данных составляют величину D. Поставим задачу оптимального выбора пропускных способностей каналов передачи данных как задачу выбора таких значений $c=(c_1,c_2,...,c_m)$, которые удовлетворяют условиям

$$c_k\in C,\ c_k>\bar{f}_k,\ k=\overline{1,m},\ \sum_{k=1}^{m}d_k(c_k)\le D$$

и минимизируют среднюю задержку на каналах при передаче пакета по сети $T(c)$.

Обозначим через $\lceil\bar{f}_k\rceil$ минимальное $\sigma\in C$ такое, что $\sigma>\bar{f}_k$, т.е. $\lceil\bar{f}_k\rceil=\min\{\sigma:\ \sigma\in C,\ \sigma>\bar{f}_k\}$. Очевидно, что D должно быть не меньше, чем $\overline{D}_0=\sum_{k=1}^{m}d_k(\lceil\bar{f}_k\rceil)$.

Для решения поставленной задачи применим метод динамического программирования [7]. Будем предполагать, что все стоимости $d_k(\sigma)$ для $\sigma\in C$, $k=\overline{1,m}$, выражаются в целых числах (в условных единицах стоимости). Тогда суммарная стоимость аренды каналов также будет целым чис-

лом при любом допустимом выборе пропускных способностей каналов. Будем решать задачу для всех целочисленных значений стоимости $z=\overline{1,D}$, а не только для одного значения D.

Определим $F_l(z)$ для $l=\overline{1,m}$ и для всех целочисленных $z=\overline{1,D}$ как минимальное значение функции

$$T(c_1,...,c_l)=\frac{1}{p\mu}\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{f_k'}{c_k-f_k'}+\frac{f_k''}{c_k-f_k''}\right)$$

при условиях $c_k\in C$, $c_k>\bar{f}_k$, $k=\overline{1,l}$, $\sum_{k=1}^{l}d_k(c_k)\le z$.

Для каждого $l=\overline{1,m}$ и всех $z=\overline{1,D}$ определим множества

$$C_l(z)=\{\sigma\in C: d_l(\sigma)\le z,\sigma>\bar{f}_l\}.$$

Для нахождения функции $F_1(z)$ согласно ее определению получаем следующее соотношение:

$$F_1(z)=\min_{c_1\in C_1(z)}\left\{\frac{1}{p\mu}\left(\frac{f_1'}{c_1-f_1'}+\frac{f_1''}{c_1-f_1''}\right)\right\},\ z=\overline{1,D}. \qquad (15)$$

При $z<d_1(\lceil\bar{f}_1\rceil)$ множество $C_1(z)$ пусто, и поэтому $F_1(z)=+\infty$. При $z\ge d_1(\lceil\bar{f}_1\rceil)$ минимум в (15) достигается при максимальном возможном значении $c_1\in C_1(z)$, которое обозначим через $\tilde{c}_1(z)$, т.е. $\tilde{c}_1(z)=\max\{\sigma:\sigma\in C_1(z)\}$. Тогда

$$F_1(z)=\frac{1}{p\mu}\left(\frac{f_1'}{\tilde{c}_1(z)-f_1'}+\frac{f_1''}{\tilde{c}_1(z)-f_1''}\right).$$

Основываясь на принципе оптимальности динамического программирования [7] для нахождения функций $F_l(z)$, $z=\overline{1,D}$, при $l=\overline{2,m}$ имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$F_l(z)=\min_{c_l\in C_l(z)}\left\{\frac{1}{p\mu}\left(\frac{f_l'}{c_l-f_l'}+\frac{f_l''}{c_l-f_l''}\right)+F_{l-1}(z-d_l(c_l))\right\} \qquad (16)$$

для всех $z=\overline{1,D}$. Значение c_l, на котором при соответствующем z достигается минимум в (16), обозначим через $\tilde{c}_l(z)$, если же $F_l(z)=+\infty$, то значение $\tilde{c}_l(z)$ считается неопределенным.

Таким образом, решение поставленной задачи заключается в последовательном нахождении табличных функций $F_1(z)$ и $\tilde{c}_1(z)$, $F_2(z)$ и $\tilde{c}_2(z)$, ..., $F_m(z)$ и $\tilde{c}_m(z)$, после чего определяются оптимальные значения пропускных способностей каналов передачи данных $c^*=(c_1^*,c_2^*,...,c_m^*)$ следующим образом (обратный ход метода динамического программирования):

$c_m^* = \tilde{c}_m(D)$, $c_{m-1}^* = \tilde{c}_{m-1}(D - d_m(c_m^*))$ и т.д. В общем случае $c_l^* = \tilde{c}_l(D - \sum_{k=l+1}^{m} d_k(c_k^*))$ для $l = m-1,...,2,1$.

Оптимальный выбор пропускных способностей узлов

Пусть как и раньше заданы топологическая структура СПД в виде графа $G = (V, \overline{U})$ и распределение потоков данных по сети. Обозначим через g_j среднюю интенсивность потока данных через узел коммутации $v_j \in V$ в бит/сек, через q_j - пропускную способность узла коммутации $v_j \in V$, измеряемую количеством обрабатываемых пакетов в секунду, и через h - размер пакета в битах. Будем рассматривать каждый УК как систему массового обслуживания типа M/M/1, т.е. предполагаем, что входной поток пакетов на узел $v_j \in V$ пуассоновский со средней интенсивностью g_j / h пакетов в секунду, а время обработки пакета в УК является непрерывной случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону со средним значением $1/q_j$. В предположении, что задержки пакета на узлах коммутации при передаче по сети являются независимыми случайными величинами, в [8] предложено следующее выражение для средней задержки пакетов на узлах коммутации:

$$T_v(q) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} \frac{g_j}{q_j - g_j / h}. \qquad (17)$$

Для оценки приемлемости формулы (17) была разработана и реализована имитационная модель сети передачи данных. Проведенные с использованием этой модели вычислительные эксперименты для небольших по размеру сетей ($n \le 30$) как с древовидной, так и с ячеистой топологической структурой, а также при различном характере распределения и величине нагрузки на сеть, показали хорошее согласование средней задержки пакета на узлах коммутации, полученное по результатам экспериментов, и средней задержки, вычисленной по формуле (17). Разница между ними в проведенных экспериментах не превышала 8%, при этом среднее отклонение было около 3%. На основании результатов экспериментов формулу (17) можно считать пригодной для практических расчетов и в теоретических рассмотрениях.

Рассмотрим задачу выбора пропускных способностей узлов коммутации $q = (q_1,...,q_n)$ как задачу минимизации средней задержки пакета на УК (17) при ограничении на суммарную стоимость узлов коммутации.

Стоимость узла коммутации (маршрутизатора) зависит от его пропускной спосособности ω, а также от типа интерфейсов подключаемых

абонентов. Обозначим через $d_j(\omega)$ стоимость узла коммутации $v_j \in V$ с пропускной способностью ω и будем предполагать, что она линейно зависит от пропускной способности узла, т.е.

$$d_j(\omega) = a_j\omega + b_j, \tag{18}$$

где $a_j > 0$, $b_j \geq 0$ для всех $j = \overline{1,n}$.

Пусть допустимые затраты на узлы коммутации составляют величину H. Поставим задачу оптимального выбора пропускных способностей узлов коммутации как задачу выбора таких значений $q = (q_1,...,q_n)$, которые удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j q_j + b_j) \leq H,\ q_j > g_j / h \text{ для всех } j = \overline{1,n},$$

и минимизируют среднюю задержку (17).

Обозначим

$$H_0 = \sum_{j=1}^{n}(a_j g_j / h + b_j).$$

Для обеспечения выполнения условий $q_j > g_j / h$, $j = \overline{1,n}$, величина допустимых затрат H при заданных функциях стоимости (18) должна быть больше величины H_0. Нетрудно показать, что при сделанных предположениях и при $H > H_0$ решение поставленной задачи существует и единственно.

Для отыскания решения задачи составим функцию Лагранжа

$$L(q,\lambda) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n}\frac{g_j}{q_j - g_j / h} + \lambda\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j q_j + b_j) - H\right).$$

Продифференцировав функцию $L(q,\lambda)$ по q_j, $j = \overline{1,n}$, и приравняв частные производные нулю, получим

$$\frac{-g_j}{p(q_j - g_j / h)^2} + a_j\lambda = 0,\ j = \overline{1,n}, \tag{19}$$

а продифференцировав $L(q,\lambda)$ по λ и приравняв нулю, получим

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j q_j + b_j) - H = 0. \tag{20}$$

Согласно правилу Лагранжа, в данном случае решение системы уравнений (19), (20) является решением поставленной задачи. Путем несложных преобразований из (19) имеем

$$q_j = \frac{g_j}{h} + \sqrt{\frac{g_j}{a_j p\lambda}},\ j = \overline{1,n}. \tag{21}$$

Подставив в (20), получаем уравнение относительно λ, из которого определяем $\lambda = \frac{1}{p}\left(\sum_{j=1}^{n}\sqrt{a_j g_j}/(H - H_0)\right)^2$, и подставив найденное значение λ в (21), окончательно получаем выражение для оптимальных значений пропускных способностей узлов

$$q_j = \frac{g_j}{h} + \frac{H - H_0}{a_j}\frac{\sqrt{a_j g_j}}{\sum_{j=1}^{n}\sqrt{a_j g_j}}\ ,\ j = \overline{1,n}.$$

Таким образом, для случая линейных функций стоимости решение задачи получено в аналитической форме.

На практике пропускные способности узлов коммутации СПД выбираются из некоторого конечного множества. Рассмотрим решение задачи в этом случае. В процессе топологического проектирования СПД для каждого УК $v_j \in V$, $j = \overline{1,n}$, определяется множество маршрутизаторов, подходящих для использования в этом УК, из которого затем делается окончательный выбор. Каждый из маршрутизаторов характеризуется своей пропускной способностью и стоимостью. Обозначим через Q_j конечное множество значений пропускных способностей маршрутизаторов, пригодных для установки в УК $v_j \in V$, $j = \overline{1,n}$, а через $\bar{d}_j(\omega)$ стоимость маршрутизатора с пропускной способностью $\omega \in Q_j$. Тогда задачу оптимального выбора пропускных способностей узлов коммутации (маршрутизаторов) можно сформулировать следующим образом. Необходимо выбрать такие значения пропускных способностей $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$, которые удовлетворяют условиям

$$q_j \in Q_j,\ \ q_j > g_j / h \text{ для всех } j = \overline{1,n},\ \ \sum_{j=1}^{n}\bar{d}_j(q_j) \le H,$$

и минимизируют среднюю задержку (17). Предполагается, что $\max_{\omega \in Q_j} \omega > g_j / h$ для всех $j = \overline{1,n}$.

Для решения поставленной задачи применим метод динамического программирования [7]. Будем предполагать, что все стоимости $\bar{d}_j(\omega)$, $\omega \in Q_j$, $j = \overline{1,n}$, выражаются в целых числах в условных единицах стоимости. Будем решать задачу для всех целочисленных значений стоимости $z = \overline{1,H}$.

Определим $\Phi_i(z)$ для $i = \overline{1,n}$ и для всех $z = \overline{1,H}$ как минимальное значение функции

$$T_v(q_1,...,q_i)=\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{i}\frac{g_j}{q_j-g_j/h}$$

при условиях $q_j \in Q_j$, $q_j > g_j/h$, $j=\overline{1,i}$, $\sum_{j=1}^{i}\bar{d}_j(q_j)\le z$. Для каждого $j=\overline{1,n}$ и всех $z=\overline{1,H}$ определим множества

$$Q_j(z)=\{\omega\in Q_j:\ \bar{d}_j(\omega)\le z,\ \omega>g_j/h\}.$$

Для нахождения функции $\Phi_1(z)$, согласно ее определению, имеем

$$\Phi_1(z)=\min_{q_1\in Q_1(z)}\left\{\frac{g_1}{p(q_1-g_1/h)}\right\},\ z=\overline{1,H},$$

а основываясь на принципе оптимальности динамического программирования [7], для нахождения функций $\Phi_i(z)$, $z=\overline{1,H}$, при $i=\overline{2,n}$, имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$\Phi_i(z)=\min_{q_i\in Q_i(z)}\left\{\frac{g_i}{p(q_i-g_i/h)}+\Phi_{i-1}(z-\bar{d}_i(q_i))\right\}.$$

Таким образом, решение поставленной задачи заключается в последовательном нахождении табличных функций $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, ..., $\Phi_n(z)$, после чего обычным образом определяются оптимальные значения пропускных способностей узлов коммутации.

Авторы выражают благодарность Еремееву Д.Н. за помощь в проведении вычислительных экспериментов.

Литература

1. Клейнрок Л. Коммуникационные сети (стохастические потоки и задержки сообщений). - М.: Наука, 1970.

2. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. - М.: Мир, 1979.

3. Зайченко Ю.П. Задачи проектирования структуры распределенных вычислительных сетей // Автоматика. - 1981. - № 4. - С. 27-40.

4. Зайченко Ю.П., Гонта Ю.В. Структурная оптимизация сетей ЭВМ. - Киев: Техніка, 1986.

5. Шварц М. Сети связи: протоколы, моделирование и анализ. - М.: Наука, 1992.

6. Янбых Г.Ф., Столяров Б.А. Оптимизация информационно-вычислительных сетей. - М.: Радио и связь, 1987.

7. Беллман Р. Динамическое программирование. - М.: ИЛ, 1960.

8. Гостев В.М., Хабибуллин Р.Ф. О некоторых моделях и методах оценки временных характеристик сетей передачи данных территориальных компьютерных сетей // Исследования по информатике. Вып. 2. - Казань: Отечество, 2000. - С. 133-142.